

BRUCHRECHNEN

I Grundlagen des Bruchrechnens

Nachfolgend werden die wesentlichen Zusammenhänge der Bruchrechnung angeführt. Der Bruchstrich ist nichts anderes als ein Geteiltzeichen. Es gilt:

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2$$

Hat ein Bruch im Zähler und Nenner gleiche Faktoren, so können diese gekürzt werden (Das was bei einem Bruch oben steht, nennt man den **Zähler**, das was unten steht ist der **Nenner**):

$$\frac{10}{45} = \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 5} = \frac{2}{9}$$

Da der Faktor 5 sowohl im Zähler als auch im Nenner auftaucht, können jeweils Zähler und Nenner durch diesen Faktor gekürzt werden. Beim Kürzen steht zwischen den Ausdrücken ein Gleichheitszeichen; somit gilt die Regel des Kürzens auch "rückwärts". Brüche können also im Zähler und Nenner gleichzeitig mit beliebigen Faktoren multipliziert werden. Dieses Verfahren nennt man Erweitern des Bruches.

$$\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{14}{63}$$

II Multiplikation und Division

$$\frac{2}{9} * \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 5} = \frac{14}{45}$$

Zwei Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert werden:

$$\frac{2}{9} \div \frac{7}{5} = \frac{2}{9} * \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 7} = \frac{10}{63}$$

Dividiert (geteilt) werden Brüche, indem mit dem Kehrwert multipliziert wird:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{2}{3}$$

Man erhält den Kehrwert eines Bruches indem man den Zähler und den Nenner vertauscht. Der Kehrwert von $\frac{3}{2}$ ist z.B. $\frac{2}{3}$

Auch, wenn Brüche dividiert werden, kann natürlich das "Geteilt-Zeichen" durch einen Bruchstrich ersetzt werden:

$$\frac{2}{9} \div \frac{7}{5} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{9} * \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{9 \cdot 7} = \frac{10}{63}$$

III Addition und Subtraktion

Die Addition und Subtraktion von Brüchen ist etwas komplizierter. Sollen zwei Brüche addiert oder subtrahiert werden, so müssen sie zunächst auf den Hauptnenner gebracht werden. Am besten lässt sich das Verfahren an einem Beispiel verdeutlichen:

$$\frac{2}{9} + \frac{7}{5}$$

Bei dem ersten Ausdruck steht 9 und bei dem zweiten 5 im Nenner. Die Brüche können erst addiert werden, wenn bei beiden das Gleiche im Nenner steht. Hierzu müssen die Brüche erweitert werden. Der erste Bruch kann mit dem Nenner des zweiten und der zweite Bruch mit dem Nenner des ersten erweitert werden:

$$\frac{2}{9} + \frac{7}{5} = \frac{2*5}{9*5} + \frac{7*9}{5*9} = \frac{10}{45} + \frac{63}{45}$$

Nun, da beide Brüche den gleichen Nenner haben, dürfen die Zähler addiert werden:

$$\frac{10}{45} + \frac{63}{45} = \frac{10+63}{45} = \frac{73}{45}$$

Wenn mehr als zwei Brüche addiert oder subtrahiert werden sollen, so muss jeder Bruch mit den Nennern aller anderen Brüche erweitert werden. Z.B.:

$$\frac{2}{a} - \frac{5}{b} + \frac{2}{c} = \frac{2*b*c}{a*b*c} - \frac{5*a*c}{b*a*c} + \frac{2*a*b}{c*a*b} = \frac{2bc - 5ac + 2ab}{abc}$$

Wenn die Nenner gemeinsame Faktoren enthalten, kann man sich allerdings die Arbeit leichter machen. Dies wird anhand des nachfolgenden Beispiels gezeigt:

$$\frac{2}{9} - \frac{5}{3} + \frac{3}{9}$$

Hier reicht es, den zweiten Bruch mit 3 zu erweitern, denn dann haben alle Brüche den gleichen Nenner.

$$\frac{2}{9} - \frac{5}{3} + \frac{3}{9} = \frac{2}{9} - \frac{15}{9} + \frac{3}{9} = -\frac{10}{9}$$

Die Nenner brauchen also zum Addieren oder Subtrahieren nur auf das kleinste gemeinsame Vielfache gebracht zu werden.

Auch die Addition von Brüchen lässt sich "umdrehen". Ein Bruch kann z.B. folgendermaßen in mehrere Brüche aufgespalten werden:

$$\frac{10}{9} = \frac{15-5}{9} = \frac{15}{9} - \frac{5}{9} = \frac{5}{3} - \frac{5}{9}$$

z.B. schreibt man:

$$\frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

Den rechten Ausdruck nennt man eine gemischte Zahl. Es handelt sich um eine abkürzende Schreibweise, bei der das Pluszeichen weggelassen wird. Es gilt:

$$1\frac{1}{9} = 1 + \frac{1}{9}$$

Wenn im Zähler oder Nenner Summen oder Differenzen stehen und gekürzt werden soll, so ist zu beachten, daß aus jedem Term gekürzt wird:

$$\frac{2a - 5ac + 2ab}{abc} = \frac{2 - 5c + 2b}{bc}$$

IV Zusammenfassung

$$\text{Bruch} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$$

Erweitern / Kürzen

Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert / durch dieselbe Zahl dividiert. Der Wert des Bruches bleibt dabei gleich!

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} \qquad \frac{12}{18} = \frac{12 : 6}{18 : 6} = \frac{2}{3}$$

Addieren / Subtrahieren

Ungleichnamige Brüche müssen zuerst durch Erweitern auf gemeinsamen Nenner gebracht werden (kgV der Nenner). Die Zähler werden addiert / subtrahiert, der Nenner bleibt gleich.

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9+8-2}{12} = \frac{15}{12} = 1\frac{1}{4}$$

Multiplizieren

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert.

$$5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3}$$

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man jeweils die Zähler und Nenner miteinander multipliziert. (nach Möglichkeit vorher kürzen!)

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{12} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 12} = \frac{1 \cdot 7}{4 \cdot 4} = \frac{7}{16}$$

Dividieren

Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert.

$$\frac{2}{3} : 5 = \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$$

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem Kehrwert des Bruches multipliziert. (Das gilt auch für Doppelbrüche.)

$$\frac{3}{4} : \frac{7}{12} = \frac{3}{4} \cdot \frac{12}{7} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{9}{7}$$

Potenzieren

Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$$

Übungsbeispiele:**Übung Ü1:** Schreibe die folgenden Brüche als gemischte Zahlen:

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{25}{4}$$

$$\frac{53}{8}$$

$$\frac{110}{9}$$

$$\frac{67}{12}$$

Lösung: $1 \frac{2}{3}$ $6 \frac{1}{4}$ $6 \frac{5}{8}$ $12 \frac{2}{9}$ $5 \frac{7}{12}$ **Übung Ü2:** Schreibe als unechte Brüche:

$$2 \frac{1}{5} =$$

$$7 \frac{1}{2} =$$

$$9 \frac{2}{3} =$$

$$4 \frac{2}{15} =$$

$$22 \frac{5}{6} =$$

Lösung: $11/5$ $15/2$ $29/3$ $62/15$ $137/6$ **Übung Ü3:** Kürze die folgenden Brüche so weit wie möglich:

$$\frac{45}{75}$$

$$\frac{88}{132}$$

$$\frac{96}{168}$$

$$\frac{130}{52}$$

$$\frac{3420}{1440}$$

Lösung: $3/5$ $2/3$ $4/7$ $5/2$ $19/8$ **Übung Ü4:** Erweitere die folgenden Brüche auf den gegebenen Nenner:

$$\frac{3}{4} = \frac{\quad}{48}$$

$$\frac{7}{5} = \frac{\quad}{40}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{\quad}{240}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{\quad}{1000}$$

$$\frac{16}{35} = \frac{\quad}{770}$$

Lösung: $36/48$ $56/40$ $100/240$ $375/1000$ $352/770$ **Kürze bei den folgenden Aufgaben die Ergebnisse soweit wie möglich und gib sie, wenn möglich, als gemischte Zahl an!****Übung Ü5:**

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

e) $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} =$

b) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$

f) $\frac{2}{5} - \frac{4}{15} =$

c) $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} =$

g) $\frac{7}{8} - \frac{2}{3} =$

d) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} =$

h) $\frac{7}{10} - \frac{3}{8} =$

Lösung: a) $5/6$ b) $5/6$ c) $1 \frac{3}{20}$ d) $1 \frac{5}{24}$
e) $5/12$ f) $2/15$ g) $5/24$ h) $13/40$

Übung Ü6:

a) $1\frac{2}{5} + 2\frac{2}{3} =$

b) $3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6} =$

c) $8\frac{5}{9} - 3\frac{1}{6} =$

d) $5\frac{1}{12} - 3\frac{3}{4} =$

e) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} =$

f) $2\frac{3}{7} + 1\frac{1}{2} - \frac{5}{14} =$

g) $5\frac{1}{2} - 3\frac{2}{9} + 1\frac{1}{6} =$

h) $1\frac{4}{25} - \frac{1}{2} + 2\frac{3}{10} =$

Lösung: a) $4\frac{1}{15}$ b) $8\frac{1}{2}$ c) $5\frac{7}{18}$ d) $1\frac{1}{3}$
 e) $\frac{5}{12}$ f) $3\frac{4}{7}$ g) $3\frac{4}{9}$ h) $2\frac{24}{25}$

Übung Ü7:

a) $\frac{3}{4} \cdot 5 =$

b) $1\frac{2}{3} \cdot 9 =$

c) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} =$

d) $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} =$

e) $6\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8} =$

f) $\frac{4}{9} \cdot 1\frac{7}{8} =$

g) $2\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} =$

h) $2\frac{1}{12} \cdot 2\frac{7}{10} =$

Lösung: a) $3\frac{3}{4}$ b) 15 c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{3}{4}$
 e) $4\frac{1}{6}$ f) $\frac{5}{6}$ g) 8 h) $5\frac{5}{8}$

Übung Ü8:

a) $\frac{1}{4} : 3 =$

b) $\frac{4}{5} : 8 =$

c) $\frac{2}{5} : \frac{3}{10} =$

d) $\frac{7}{12} : \frac{5}{9} =$

e) $2\frac{1}{3} : \frac{1}{6} =$

f) $3\frac{3}{4} : \frac{5}{8} =$

g) $\frac{3}{8} : 2\frac{7}{10} =$

h) $4\frac{1}{5} : 4\frac{2}{3} =$

Lösung: a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $1\frac{1}{3}$ d) $1\frac{1}{20}$
 e) 14 f) 6 g) $\frac{5}{36}$ h) $\frac{9}{10}$

Übung Ü9:

a) $2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5} \cdot 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} =$

b) $(2\frac{3}{4} - 1\frac{2}{5}) \cdot 1\frac{2}{3} + 2\frac{1}{6} =$

c) $3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5} \cdot (1\frac{3}{8} + \frac{1}{2}) =$

d) $(3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{5}) \cdot (1\frac{3}{8} + \frac{1}{2}) =$

e) $(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}) \cdot (1\frac{1}{7} - \frac{1}{2}) =$

f) $(2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}) \cdot 1\frac{1}{7} - \frac{1}{2} =$

Lösung: a) $2\frac{7}{12}$ b) $4\frac{5}{12}$ c) $1\frac{1}{12}$

d) 4

e) $3\frac{3}{4}$ f) $6\frac{1}{6}$

Übung Ü10:

a) $(2\frac{2}{3} \cdot 1\frac{3}{5} - \frac{4}{5} \cdot 1\frac{1}{3}) : 3\frac{1}{5} =$

b) $(4\frac{2}{3} - 1\frac{3}{4}) \cdot 1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{2} : \frac{3}{5} =$

c) $4\frac{3}{8} - 1\frac{5}{22} : 3\frac{3}{11} + 2\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{12} =$

d) $(4\frac{1}{5} - 1\frac{2}{7}) \cdot \frac{5}{6} + (3\frac{1}{2} + 1\frac{2}{9}) : \frac{5}{18} =$

e) $10\frac{2}{3} - (4\frac{2}{5} - 1\frac{7}{10}) : (2\frac{2}{5} - 1\frac{1}{2}) =$

f) $7\frac{1}{2} - (3\frac{1}{5} : 2\frac{2}{15} + 1\frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{7}) =$

Lösung: a) 1

b) 0

c) $5\frac{1}{4}$ d) $19\frac{3}{7}$ e) $7\frac{2}{3}$ f) $3\frac{1}{2}$

Übung Ü11:

a) $3\frac{1}{3} : (2\frac{1}{2})^2 + 6\frac{3}{10} : (5\frac{1}{2} - \frac{1}{10}) =$

b) $(2\frac{1}{4} \cdot (\frac{2}{3})^3 - \frac{3}{10} : 1\frac{4}{5}) \cdot 4\frac{4}{5} =$

c) $(\frac{1}{6} - (\frac{1}{2})^3) \cdot (2\frac{1}{2} + 1\frac{2}{3} : \frac{2}{5}) =$

d) $(2\frac{1}{12} - 1\frac{1}{3})^2 - (1\frac{1}{5} - 10\frac{1}{2} : 12) + \frac{1}{80} =$

Lösung: a) $1\frac{7}{10}$ b) $2\frac{2}{5}$ c) $\frac{5}{18}$ d) $\frac{1}{4}$